ガウス積分を漸化式で記憶する

2019 年 6 月 6 日

$I_n = \int_{\{0,-\infty\}}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots,\ \alpha > 0)$ とすると

$$I_n = \frac{n-1}{2\alpha} I_{n-2} \quad (n \geq 2), \tag{1}$$

$$I_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} & (0 \sim \infty) \\ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} & (-\infty \sim \infty) \end{cases}, \qquad I_1 = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & (0 \sim \infty) \\ 0 & (-\infty \sim \infty) \end{cases} \tag{2}$$

気持ち

$\int_{\{0,-\infty\}}^{\infty}$ は積分区間が $0 \sim \infty$, または $-\infty \sim \infty$ という意味として用いている。$\int x^n e^{-\alpha x^2} dx$ の形の積分は至るところに現れるため非常に重要であるが、多少覚えるのが大変である。そこでこの積分を (1) のように漸化式の形で記憶することを提案したい。この漸化式は積分区間が $0 \sim \infty,\ -\infty \sim \infty$ のどちらであっても成立するので勝手がいい。I_0 と I_1 の値も一緒に記憶しておくことになるが、I_0 は有名なガウス積分そのものであるし、I_1 は

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha}\left[e^{-\alpha x^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

のように直接計算できる。積分区間による値の違いも被積分関数の偶奇性を考えると容易に分かるであろう。以上を踏まえて漸化式 (1) を繰り返して使い、最後に現れる I_0 や I_1 に (2) を当てはめていく様子を頭の中で想像すると、以下のように公式を次々と構成することができる。$n \geq 0$ として

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx &= \frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx &= \frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx &= \frac{(2n)!!}{(2\alpha)^n}\frac{1}{2\alpha} = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx &= 0
\end{aligned}$$

ここで第 3 式に対しては $(2n)!! = 2^n n!$ を用いて式を簡略化した。最終的にはこの 4 式を覚えられればよいのであるが、ここで提案した手法が少しでもその記憶の助けになれば幸いである。

以下では漸化式 (1) を証明しよう。なんてことはない。ただ部分積分を行うだけである。いい具合にお釣りの項が消えてくれるので、簡単に漸化式を得ることができる。

[証明]　$n \geq 2$ のとき、$x^{n-1}e^{-\alpha x^2}$ は $x = 0,\ x \to \infty,\ x \to -\infty$ どの場合においても 0 になるので、

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\{0,-\infty\}}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \int_{\{0,-\infty\}}^{\infty} x^{n-1}\left(-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\right)' \\
&= \cancel{-\frac{1}{2\alpha}\left[x^{n-1}e^{-\alpha x^2}\right]_{\{0,-\infty\}}^{\infty}} + \frac{n-1}{2\alpha}\int_{\{0,-\infty\}}^{\infty} x^{n-2}e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n-1}{2\alpha} I_{n-2}
\end{aligned}$$

□

© @bakkyalo_