東京工業大学 理学院 物理学コース
大学院 修士課程 入学試験 過去問題 解答例

@bakkyalo_

2020 年 9 月 8 日

概要

これは @bakkyalo_ による東工大物理学コースの院試過去問の解答です。大学院に落ちた人間が趣味で書いているだけなので普通に間違えています。こんなゴミみたいな PDF に何の値打ちもありませんので一切の著作権を放棄します。ご自由にお使いください。

目次

平成 31 年度

午前

第 1 問

[A] (1) 棒の線密度 $\lambda = m/l$

$$\therefore I_l = \int_0^l \lambda r^2\,dr = \frac{1}{3}\lambda l^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}ml^2}$$

円盤の面密度 $\sigma = M/\pi a^2$

$$\therefore I_a = \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta\ \sigma r^2 = \frac{1}{2}\sigma\pi a^4 = \boldsymbol{\frac{1}{2}Ma^2}$$

(2) 棒、円盤それぞれについて、重心にポテンシャルが集中していると考えて計算すればよいので

$$V = \boldsymbol{\frac{1}{2}mgl(1-\cos\theta) + Mg\{l(1-\cos\theta) + a(1-\cos\phi)\}}$$

(3) 点 O の座標 $(x_\mathrm{o}, y_\mathrm{o})$ は

$$\begin{aligned} x_\mathrm{o} &= l\cos\theta + a\cos\phi \\ y_\mathrm{o} &= l\sin\theta + a\sin\phi \end{aligned}$$

これより、点 O の速さの 2 乗 ${v_\mathrm{o}}^2$ は

$$\begin{aligned} {v_\mathrm{o}}^2 &= {\dot{x_\mathrm{o}}}^2 + {\dot{y_\mathrm{o}}}^2 \\ &= (-l\dot\theta\sin\theta - a\dot\phi\sin\phi)^2 + (l\dot\theta\cos\theta + a\dot\phi\cos\phi)^2 \\ &= l^2\dot\theta^2 + a^2\dot\phi^2 + 2al\,\dot\theta\dot\phi\cos(\theta-\phi) \end{aligned}$$

したがって、運動エネルギー T は、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I_l\dot\theta^2 + \frac{1}{2}M{v_o}^2 + \frac{1}{2}I_a\dot\phi^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2 + \frac{3}{4}Ma^2\dot\phi^2 + Mal\,\dot\theta\dot\phi\cos(\theta-\phi)} \end{aligned}$$

(4) V について、x が微小量であるとき、$\cos x \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2$、すなわち $1-\cos x \simeq \frac{1}{2}x^2$ と近似できる。また、T について、3 次以上の微小量は無視できるため $\cos(\theta-\phi)$ の部分は 1 としてよい。よって、ラグランジアン L は、

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &\simeq \frac{1}{6}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2 + \frac{3}{4}Ma^2\dot\phi^2 + Mal\,\dot\theta\dot\phi - \frac{1}{4}mgl\theta^2 - \frac{1}{2}Mg(l\theta^2 + a\phi^2) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\theta} &= -\frac{1}{2}mgl\theta - Mgl\theta & \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} &= \frac{1}{3}ml^2\dot\theta + Ml^2\dot\theta + Mal\dot\phi \\ \frac{\partial L}{\partial\phi} &= -Mga\phi & \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} &= \frac{3}{2}Ma^2\dot\phi + Mal\dot\theta \end{aligned}$$

であるから、θ, ϕ についてのオイラー・ラグランジュ方程式 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \theta:&\quad \boldsymbol{\frac{1}{3}ml^2\ddot\theta + Ml^2\ddot\theta + Mal\ddot\phi + \frac{1}{2}mgl\theta + Mgl\theta = 0} \\ \phi:&\quad \boldsymbol{\frac{3}{2}Ma^2\ddot\phi + Mal\ddot\theta + Mga\phi = 0} \end{aligned}$$

(5) 行列形式にすると、

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}ml^2+Ml^2 & Mal \\ Mal & \frac{3}{2}Ma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mgl+Mgl & 0 \\ 0 & Mga \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}$$

両辺を M でわり $m/M \to 0$ を用いると、

$$\begin{pmatrix} l^2 & al \\ al & \frac{3}{2}a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} gl & 0 \\ 0 & ga \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}$$

ここで $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \alpha),\ \phi = \phi_0 \sin(\omega t + \alpha)$ とおいてこれらを代入して整理すると、

$$\begin{pmatrix} l^2\omega^2 - gl & al\omega^2 \\ al\omega^2 & \frac{3}{2}a^2\omega^2 - ga \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

θ_0, ϕ_0 が non-zero であるためには係数行列の行列式が 0 であればいいので、

$$(l^2\omega^2 - gl)\left(\frac{3}{2}a^2\omega^2 - ga\right) - (al\omega^2)^2 = 0$$
$$al\,\omega^4 - g(2l+3a)\,\omega^2 + 2g^2 = 0$$

したがって、

$$\omega_\pm{}^2 = \boldsymbol{\frac{g}{2al}\left[(2l+3a) \pm \sqrt{(2l+3a)^2 - 8al}\right]}$$

(6)

第 3 問

[A] (1) $\nabla \ln |\boldsymbol{r}| = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right) \ln \sqrt{x^2+y^2} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}$

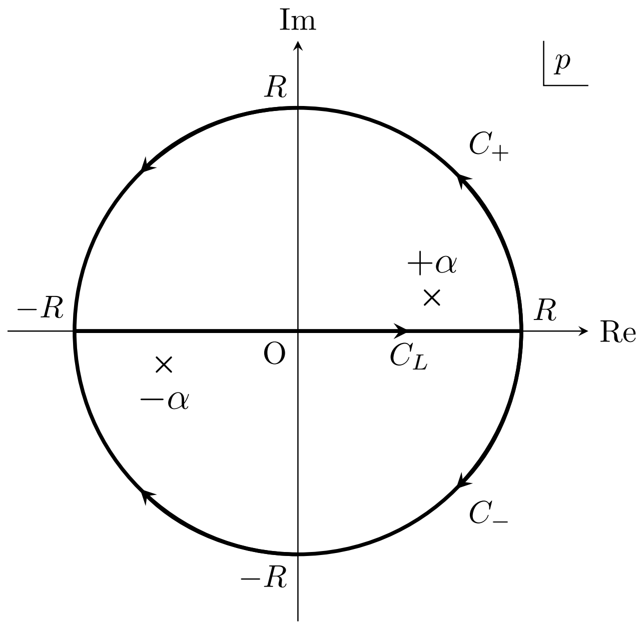
(2) $r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ から

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ -\dfrac{y}{r^2} & \dfrac{xy}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boldsymbol{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \boldsymbol{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}}$$



(3) $|\boldsymbol{r}| = r$ であるので

$$\Delta \ln|\boldsymbol{r}| = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\ln r = -\frac{1}{r^2} + 0 + \frac{1}{r}\frac{1}{r} = \mathbf{0}$$

(4) $\Delta \ln|\boldsymbol{r}| = \nabla\cdot(\nabla\ln|\boldsymbol{r}|) = \nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y}{x^2+y^2}$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= \iint_{|\boldsymbol{r}|\le a} \Delta\ln|\boldsymbol{r}|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{|\boldsymbol{r}|\le a}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \oint_{|\boldsymbol{r}|=a}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right) \end{aligned}$$

$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$ と置いて $I = \displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \boldsymbol{2\pi}$

(5) $\Delta\ln|\boldsymbol{r}| = 0\ (|\boldsymbol{r}|\ne 0),\ \displaystyle\iint_{|\boldsymbol{r}|\le a}\ln|\boldsymbol{r}|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi$ より、$\Delta\ln|\boldsymbol{r}| = \boldsymbol{2\pi\delta(|r|)}$

[B] (6) 複素数 α を $\alpha^2 = k^2 + i\delta$ の解でかつ第 1 象限にあるものとすると、$\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\alpha = k$。$f(p) = \dfrac{\mathrm{e}^{ipx}}{p^2-k^2-i\delta} = \dfrac{\mathrm{e}^{ipx}}{p^2-\alpha^2}$ と置くとこれは $p=\pm\alpha$ で 1 位の極を持つ。留数は

$$\operatorname*{Res}_{p=\pm\alpha} f(p) = f(p)(p\mp\alpha)|_{p\to\pm\alpha} = \left.\frac{\mathrm{e}^{ipx}}{p\pm\alpha}\right|_{p\to\pm\alpha} = \pm\frac{\mathrm{e}^{\pm i\alpha x}}{2\alpha} \to \pm\frac{\mathrm{e}^{\pm ikx}}{2k} \qquad (\delta\to 0)$$

$0<|\alpha|<R$ とし、図のように実軸上の経路 C_L と、原点を中心とする半径 R の半円路 C_+, C_- を取り、$x\ge 0$ の時は $C_L\cup C_+$、$x\le 0$ の時は $C_L\cup C_-$ の閉路を採用する。留数定理より

$$\begin{aligned} \int_{C_L} f(p)\,\mathrm{d}p + \int_{C_+} f(p)\,\mathrm{d}p &= 2\pi i\operatorname*{Res}_{p=+\alpha} f(p) \qquad (x\ge 0) \\ \int_{C_L} f(p)\,\mathrm{d}p + \int_{C_-} f(p)\,\mathrm{d}p &= -2\pi i\operatorname*{Res}_{p=-\alpha} f(p) \qquad (x\le 0) \end{aligned}$$

$R\to\infty$ の時、左辺第一項は J になる。続いて $x\ge 0$ の時、C_+ における積分は $p = R\mathrm{e}^{i\theta}\ (\theta : 0\to\pi)$ と置くと

$$\left|\int_{C_+} f(p)\,\mathrm{d}p\right| = \left|\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{iRx\cos\theta}\mathrm{e}^{-Rx\sin\theta}}{R^2\mathrm{e}^{2i\theta}-\alpha^2}\,iR\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \le \int_0^{\pi}\frac{R\,\mathrm{e}^{-Rx\sin\theta}}{R^2-|\alpha|^2}\,\mathrm{d}\theta \to 0 \qquad (R\to\infty)$$

となり、$R \to \infty$ で消失する。同様に、$x \le 0$ の時の C_- における積分も $R \to \infty$ で消失することを示せる。以上をまとめて、$J = \boldsymbol{\dfrac{\pi i}{k} \mathrm{e}^{ik|x|}}$。

午後

第 1 問

(1) $\sigma_j = m + (\sigma_j - m)$ を与えられたハミルトニアンの第一項に代入し

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -J \sum_{\langle j,k \rangle} \{m + (\sigma_j - m)\}\{m + (\sigma_k - m)\} - H \sum_j \sigma_j \\
&= -J \sum_{\langle j,k \rangle} \{m^2 + m(\sigma_j - m) + m(\sigma_k - m) + \cancel{(\sigma_j - m)(\sigma_k - m)}\} - H \sum_j \sigma_j \\
&\simeq -J \sum_{\langle j,k \rangle} \{m(\sigma_j + \sigma_k) - m^2\} - H \sum_j \sigma_j \\
&= \boxed{\boldsymbol{2JNm^2}} - \sum_j \sigma_j \left(\boxed{\boldsymbol{4Jm}} + H \right) \ \equiv \ \mathcal{H}_{MF}
\end{aligned}$$

最後は最近接対の総数が $2N$ であることと $\displaystyle\sum_{\langle j,k \rangle} (\sigma_j + \sigma_k) = 4 \sum_j \sigma_j$ であることを用いた。

(2) $\beta = 1/k_B T$ とすると

$$\begin{aligned}
Z_{MF} &= \mathrm{Tr}\left[\mathrm{e}^{-\beta \mathcal{H}_{MF}}\right] = \mathrm{e}^{-2\beta JNm^2} \ [2\cosh\{\beta(4Jm + H)\}]^N \\
&= \boldsymbol{\mathrm{e}^{-2JNm^2/k_BT} \left[2\cosh \frac{4Jm + H}{k_B T} \right]^N}
\end{aligned}$$

$$F_{MF} = -\frac{1}{\beta} \log Z_{MF} = \boldsymbol{2JNm^2 - Nk_BT \log \left(2\cosh \frac{4Jm + H}{k_B T} \right)}$$

(3) $\displaystyle \left\langle \sum\nolimits_j \sigma_j \right\rangle_{MF} = -\frac{\partial F_{MF}}{\partial H} = N \tanh \frac{4Jm + H}{k_B T}$, これが Nm と等しいとして $\boldsymbol{m = \tanh \dfrac{4Jm + H}{k_B T}}$

(4) $H = 0$ について、$\tanh \left(\dfrac{4J}{k_B T} m \right)$ の $m = 0$ における傾きが $\dfrac{4J}{k_B T}$ であることに注意すると、$m \neq 0$ で解を持つ条件は $1 < \dfrac{4J}{k_B T} \iff T < \boldsymbol{\dfrac{4J}{k_B}} \equiv T_C$.

(5) $T \to T_C - 0$ の時、$|m|$ は十分小さいと考えられるので (3) の tanh を 3 次の項まで展開すると

$$m = \tanh \left(\frac{T_C}{T} m \right) \approx \frac{T_C}{T} m - \frac{1}{3} \left(\frac{T_C}{T} m \right)^3 \qquad \therefore \ |m| \approx \sqrt{3 \left(\frac{T}{T_C} \right)^2 \frac{T_C - T}{T_C}} \propto (T_C - T)^{1/2}$$

ここで $(T/T_C)^2 \approx 1$ とした。よって $\beta = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(6) $T \to T_C + 0$ の時、$H = 0$ 付近では m も小さいので (3) の tanh を 1 次の項まで展開すると

$$m \approx \frac{T_C}{T} m + \frac{H}{k_B T} \iff m \approx \frac{H}{k_B (T - T_C)} \qquad \therefore \ \chi = \left. \frac{\partial m}{\partial H} \right|_{H=0} \approx \frac{1}{k_B (T - T_C)} \propto (T - T_C)^{-1}$$

よって $\gamma = \boldsymbol{-1}$

第 2 問

(1) シュレーディンガー方程式 $\hat{H}\psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi)$ を書き下すと

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 + \frac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{2\mu r^2} \right] \frac{\chi_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) = E \cdot \frac{\chi_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi)$$

$\hat{\boldsymbol{L}}^2\ Y_l^m(\theta,\phi) = l(l+1)\hbar^2\ Y_l^m(\theta,\phi)$ を用いて両辺を $-\dfrac{1}{Y_l^m(\theta,\phi)}\cdot\dfrac{2\mu r}{\hbar^2}$ 倍すると次が得られる。

$$\boldsymbol{\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \alpha^2 r^2 + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi_l(r) = 0}$$

(2) a_n に対する漸化式は $n\to\infty$ において $a_{n+1}\sim\dfrac{\alpha}{n}a_n$ のように振舞うので、仮に $u_l(\rho)$ の展開式が無限に続くとすると $\rho\to\infty$ において $u_l(\rho)\sim \mathrm{e}^{\alpha\rho}$、すなわち $r\to\infty$ において $\chi_l(r)\sim r^{l+1}\mathrm{e}^{\alpha r^2/2}$ のように振舞うことになり、$\chi_l\to 0$ に反する。したがって $u_l(\rho)$ の展開は有限和であることが必要であり、そのためには、ある $n=0,1,2,\ldots$ に対して $k^2=\alpha(2l+4n+3)$ となればよいのでエネルギー E は

$$\boldsymbol{E} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \boldsymbol{= \frac{1}{2}\hbar\omega(2l+4n+3) \qquad (n=0,1,2,\ldots)}$$

(3)

参考文献

[1]