$\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z),\quad r^2=|\boldsymbol{r}|^2=\delta_{ij}x_ix_j=x^2+y^2+z^2$ としたとき、$\nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right):=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ の直交座標系 (x,y,z) についての成分表示 d_{ij} は

$$d_{ij}:=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{r}\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r} & \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{r} & \frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{r}\\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{r}\\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{r} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{r^2-x^2}{r^3} & -\frac{xy}{r^3} & -\frac{zx}{r^3}\\ -\frac{xy}{r^3} & \frac{r^2-y^2}{r^3} & -\frac{yz}{r^3}\\ -\frac{zx}{r^3} & -\frac{yz}{r^3} & \frac{r^2-z^2}{r^3}\end{bmatrix}\tag{1}$$

ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタである[*1]。

記号の乱用

本来 $\nabla=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=\mathrm{grad}$ はスカラー場に作用してその勾配を表すベクトル場を生み出す演算であるが、今回の $\nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ は ∇ をベクトル場 $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ に対して作用させているので記号の乱用である。しかし、この $\nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{r}\right)$ と解釈することで、ベクトル場からテンソル場を生み出す演算とみなしてもよさそうである。この意味では $\nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ はテンソル積 $\otimes$ の記号を用いて $\nabla\otimes\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ と書いたほうがより適切であり、実際にこのような演算は存在する[*2]。ただ、正確な表記にとらわれると余計まどろっこしくなるし、こう書かずとも式の意味自体は分かると思うので、敢えて記号の乱用をすることにした。

規約と計算の方針

ここではローマ文字の添え字 (i,j,k,l) が 1 から 3 まで走るものとしてアインシュタインの縮約規約を採用する[*3]。成分ごとに計算するのもよいが、その方法だと商の微分を 9 回も行わねばならず、また対称性も見失いがちになるため、今回は 9 成分まとめてテンソル演算をすることにする。とはいうものの、$\frac{\partial x_j}{\partial x_i}=\delta_{ij}$ に注意して普通に微分計算を行うだけであるから難しくはないはずである。このような計算は一般相対論や連続体力学などでも有効であるのでここで慣れておくとよい。

[証明]

$$\begin{aligned}d_{ij}&=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j\cdot\frac{1}{\sqrt{\delta_{kl}x_kx_l}}\right)=\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\delta_{kl}x_kx_l}}+x_j\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta_{kl}x_kx_l}}\right)\\&=\delta_{ij}\cdot\frac{1}{\sqrt{\delta_{kl}x_kx_l}}-x_j\cdot\frac{\delta_{kl}(\delta_{ik}x_l+\delta_{il}x_k)}{2(\delta_{kl}x_kx_l)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\delta_{ij}\delta_{kl}x_kx_l}{(\delta_{kl}x_kx_l)^{\frac{3}{2}}}-\frac{x_ix_j}{(\delta_{kl}x_kx_l)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{\delta_{ij}r^2-x_ix_j}{r^3}\end{aligned}$$

ここで得られた式に各成分 $(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)$ を当てはめていくと、(1) の最右辺が得られる。 □

縮約規約を用いてテンソル計算をすることで、9 回分の微分計算を一気に行うことができた。また、証明で得られた式から d_{ij} が対称テンソルになることも容易に読み取れるため、非常に便利だと思う。

[*1] クロネッカーのデルタ δ_{ij} は次のように定義される対称テンソルである。

$$\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

[*2] たとえば $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$ とすると、それらのテンソル積 $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix},\qquad\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3\\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3\\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3\end{bmatrix}$$

と表せる。これより明らかに $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}$ である。

[*3] アインシュタインの縮約規約とは、同じ項に同じ添え字が現れたときにはその添え字について和を取るという規則である。たとえば、$a_i\boldsymbol{e}_i=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ といった具合である。またクロネッカーのデルタと組み合わせると $\delta_{ij}x_ix_j={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=r^2$ を満たすことも分かるであろう。この規約では和をとる際にいちいち $\sum_{i=1}^{3}$ と書く必要がなくなるので、ベクトル解析の公式の証明や複雑なテンソル計算を行う時などで便利である。